

旋转波片偏振仪波片方位误差研究

代 虎^{1,2}, 颜昌翔^{1*}

- 1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033
- 2. 兰州空间技术物理研究所, 甘肃 兰州 730000

摘 要 旋转波片 Stokes 偏振仪是最常用的测量光束偏振态的仪器。波片快轴方位误差是影响旋转波片 Stokes 偏振仪的主要误差源之一。为了研究波片方位偏差对测量精度的影响, 提出了一种描述波片快轴方位误差向最终的偏振测量误差传递的数学模型, 并引入协方差矩阵法表征偏振测量误差。根据这一模型, 获得最优的偏振仪配置参数。在推导过程中, 假设波片方位误差服从同一高斯分布。基于此误差模型, 得到如下结论: (1)由波片方位误差引入的测量误差与光强测量次数 N 成反比; (2)测量误差独立于入射光强度, 但是依赖于入射光偏振态 (s_1, s_2, s_3) 和波片的位相延迟量 δ ; (3)波片位相延迟量在 $(103.22^\circ, 116.13^\circ)$ 范围内时波片方位误差引入的测量误差最小。最后, 经过仿真实验证明, 所得解析结果与仿真模拟结果相一致。

关键词 偏振; 椭圆偏振与测量; 协方差矩阵; 波片方位误差

中图分类号: O436.3; TH744 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3964/j.issn.1000-0593(2017)07-2288-06

引 言

Stokes 偏振仪由于出色的性能已经被应用于地物、大气和水下等遥感探测^[1-3], 波段包括可见光至长波红外。偏振探测有利于提高目标对比度, 能够减弱杂散光干扰, 以及提供目标表面的方向朝向信息和表面粗糙度信息等^[4-6]。旋转波片、固定偏振器(RRFP) Stokes 偏振仪是一种十分常见的偏振仪, 偏振探测功能由一个旋转的波片、固定的线偏振器和探测器组成的偏振组件实现, 其结构如图 1 所示。由于结构相对简单可靠, RRFP Stokes 偏振仪通常被附于光学系统后端完成偏振探测任务。

RRFP Stokes 偏振仪实现偏振探测的机理是利用波片快轴在 N (N 通常 ≥ 4) 个不同位置时的光强构建线性方程组来反演入射光的 Stokes 矢量(SV)。在实际工程应用中, 常被采用的波片方位分布方式有两种。第一种是波片方位角均匀分布于 360° 。市场上的 RRFP Stokes 偏振仪较多采用这种方位角分布。第二种是非均匀分布的具有特定角度的波片方位角组合, 这种方位角分布通常都是经过系统优化得到的。例如, $(-45^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ)$, $(\pm 15.1^\circ, \pm 51.7^\circ)$, $(-59.6^\circ, -36.8^\circ, -10.1^\circ, 10.1^\circ)$ 等, 这些都是根据不同应用条件分别通过系统优化获得的方位角组合。在 SV 测量过程中, 可

能出现的误差源有三种: (1)光强测量过程中的附加噪声; (2)偏振元件的非理想性误差; (3)光强测量时波片快轴方位误差。前两种误差源在公开发表的文献中已经被详细的讨论过, 若干使系统信噪比(SNR)最大化和系统误差最小化的结构配置(包括波片快轴方位角和波片位相延迟量)被提出。其中, Ambirajan 等通过仿真计算发现一些特定的波片快轴方位角集能够削弱前两种误差源引入的偏振误差, 例如 $(-45^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ)$ ^[7]; Sabatke 等以测量矩阵条件数为目标函数优化得出波片位相延迟量 132° , 快轴方位角 $(\pm 15.1^\circ, \pm 51.7^\circ)$ 的配置能够使光强测量过程的附加高斯噪声最小化^[8]; Francois Goudail 研究了 shot 噪声抑制问题, 并且证明在某些特定情况下, 对于高斯噪声最优的系统配置也能使 Shot 噪声最小化^[9]; Tyo 等研究了信噪比与测量矩阵条件数、系统误差分别和测量矩阵条件数的关系以及系统

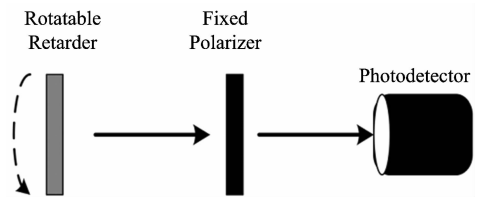


图 1 RRFP Stokes 偏振仪的结构
Fig. 1 The structure of a RRFP Stokes polarimeter

收稿日期: 2014-02-21, 修订日期: 2015-04-18

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2011AA12A103)资助

作者简介: 代 虎, 1985 年生, 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所博士研究生, 兰州空间技术物理研究所工程师

e-mail: daihulove1@126.com * 通讯联系人 e-mail: yancx@ciomp.ac.cn

信噪比和系统误差的关系^[10-11]。Sabatke 等以 EWV 作为品质因子表征系统偏振仪误差源放大的参数,证明了均匀分布的波片快轴方位角的噪声免疫能力并不逊色于经过优化获得的最优方位角^[8]。

本文致力于研究波片方位角均匀分布类型 RRFP Stokes 偏振仪的第三种误差源对系统的影响。我们利用泰勒展开将波片方位误差引入的光强测量误差从总光强中分离出来,并根据波片方位角误差的特性,假设方位角误差为随机误差,且服从同一高斯分布。基于此两点,推导出 SV 重建误差的协方差矩阵。根据所得的协方差矩阵,我们了解到,由波片

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos^2 2\theta_1 + \cos\delta \sin^2 2\theta_1 & \sin^2(\delta/2) \sin 4\theta_1 & -\sin\delta \sin 2\theta_1 \\ 1 & \cos^2 2\theta_2 + \cos\delta \sin^2 2\theta_2 & \sin^2(\delta/2) \sin 4\theta_2 & -\sin\delta \sin 2\theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos^2 2\theta_N + \cos\delta \sin^2 2\theta_N & \sin^2(\delta/2) \sin 4\theta_N & -\sin\delta \sin 2\theta_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 \mathbf{W} 是系统测量矩阵 ($N \times 4$), $\vec{\mathbf{S}} = (s_0, s_1, s_2, s_3)^T$ 是入射光的 Stokes 矢量, δ 是波片的位相延迟量, θ_i 是第 i 次光强测量时波片的方位角,且 $\theta_i = \theta_1 + (i-1) \frac{360^\circ}{N}$, ($i = 1, 2, \dots, N$)。

由于光强测量时波片快轴方位相对于理想的位置存在偏差,测得的光强会因此而存在误差。由波片方位误差引入的光强误差可以表示为式(3)

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\mathbf{I}} &= \Delta \mathbf{W} \vec{\mathbf{S}} & (3) \\ \Delta \mathbf{W} &= \mathbf{W}' - \mathbf{W} & (4) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \sin 4\theta_1 (\cos\delta - 1) & -\xi_1 \cos 4\theta_1 (\cos\delta - 1) & -\xi_1 \cos 2\theta_1 \sin\delta \\ 0 & \xi_2 \sin 4\theta_2 (\cos\delta - 1) & -\xi_2 \cos 4\theta_2 (\cos\delta - 1) & -\xi_2 \cos 2\theta_2 \sin\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \xi_N \sin 4\theta_N (\cos\delta - 1) & -\xi_N \cos 4\theta_N (\cos\delta - 1) & -\xi_N \cos 2\theta_N \sin\delta \end{pmatrix} \quad (6)$$

因此 RRFP Stokes 偏振仪的 SV 测量误差 $\Delta \vec{\mathbf{S}}$ 与波片方位误差的关系可以用式(7)表示。

$$\Delta \vec{\mathbf{S}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \Delta \vec{\mathbf{I}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Q} \vec{\xi} \quad (7)$$

根据式(2)和式(6)可以推导出矩阵 \mathbf{Q} , 矩阵 \mathbf{Q} 是对角矩阵,

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{cases} s_1 \sin 4\theta_i (\cos\delta - 1) - s_2 \cos 4\theta_i (\cos\delta - 1) - s_3 \cos 2\theta_i \sin\delta, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\vec{\xi}$ 是 N 个波片方位误差组成的向量, $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$ 。

当 RRFP Stokes 偏振仪工作的时候,波片通过均匀快速旋转的方式调制光强,产生周期变化的光强信号。但是由于波片旋转速度不均匀、初始测量角偏差和光强测量的时间间隔不一致等原因互相交织,导致波片方位误差呈现出随机误差的特性。本文为了简化分析,假设波片方位误差是随机误

方位误差引入的 SV 测量误差独立于入射光强,但是依赖于入射光的偏振态和波片的位相延迟量。

1 误差传递模型

利用 RRFP Stokes 偏振仪测量完整的 SV 时,需要测量 $N(N \geq 4)$ 次不同波片方位对应的光强 $\vec{\mathbf{I}} = (I_1, I_2, \dots, I_N)^T$ 。当不存在任何噪声和误差时,测得的光强矢量如式(1)所示。

$$\vec{\mathbf{I}} = \mathbf{W} \vec{\mathbf{S}} \quad (1)$$

式中 \mathbf{W}' 是仅存在波片方位误差时的测量矩阵。

当波片方位误差足够小(相比于 180°)时,矩阵 $\Delta \mathbf{W}$ 的元素可以表示为式(5)。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}_{ij} &= \mathbf{W}'_{ij} - \mathbf{W}_{ij} = \xi_i \left[\frac{\mathbf{W}_{ij}(\theta_i + \xi_i) - \mathbf{W}_{ij}(\theta_i)}{\xi_i} \right] \\ &\approx \xi_i \left. \frac{\partial \mathbf{W}_{ij}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_i} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 ξ_i 表示第 i 次光强测量时的波片方位误差。根据式(5)的近似,矩阵 $\Delta \mathbf{W}$ 的形式如式(6)。

差,且服从同一高斯分布,标准差为 σ 。根据此假设,向量 $\vec{\xi}$ 是由 N 个随机变量构成的向量,根据式(7)可知,Stokes 偏振仪的 SV 测量误差也是随机向量。协方差矩阵可以用于估计 Stokes 参数的测量误差^[8, 12]。由波片方位误差引入的 SV 测量误差的协方差矩阵如式(9)所示。

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= (\Delta \vec{\mathbf{S}} \Delta \vec{\mathbf{S}}^T) = \\ &= \begin{pmatrix} \langle \Delta s_0^2 \rangle & \langle \Delta s_0 \Delta s_1 \rangle & \langle \Delta s_0 \Delta s_2 \rangle & \langle \Delta s_0 \Delta s_3 \rangle \\ \langle \Delta s_1 \Delta s_0 \rangle & \langle \Delta s_1^2 \rangle & \langle \Delta s_1 \Delta s_2 \rangle & \langle \Delta s_1 \Delta s_3 \rangle \\ \langle \Delta s_2 \Delta s_0 \rangle & \langle \Delta s_2 \Delta s_1 \rangle & \langle \Delta s_2^2 \rangle & \langle \Delta s_2 \Delta s_3 \rangle \\ \langle \Delta s_3 \Delta s_0 \rangle & \langle \Delta s_3 \Delta s_1 \rangle & \langle \Delta s_3 \Delta s_2 \rangle & \langle \Delta s_3^2 \rangle \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \quad (10)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{W} \quad (11)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示求期望值,矩阵 $(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}$ 可以根据式(12)计算,矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 可以根据式(13)计算。

$$(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} = \frac{4}{N} \begin{pmatrix} \frac{3 + 2\cos\delta + 3\cos^2\delta}{(1 - \cos\delta)^2} & -\frac{4(1 + \cos\delta)}{(1 - \cos\delta)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{4(1 + \cos\delta)}{(1 - \cos\delta)^2} & \frac{8}{(1 - \cos\delta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{(1 - \cos\delta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sin^2\delta} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{11} &= \frac{N}{8} [s_1^2 (\cos\delta - 1)^2 + s_2^2 (\cos\delta - 1)^2 + s_3^2 \sin^2 \delta] \\
 \Lambda_{12} &= \Lambda_{21} = \frac{N}{16} s_1^2 \sin^2 \delta (1 - \cos\delta) + \frac{N}{16} s_2^2 \sin^2 \delta (1 - \cos\delta) + \\
 &\quad \frac{N}{32} s_3^2 (3 + \cos\delta) \sin^2 \delta \\
 \Lambda_{13} &= \Lambda_{31} = \Lambda_{34} = \Lambda_{43} = 0 \\
 \Lambda_{14} &= \Lambda_{41} = \frac{N}{8} s_1 s_3 \sin^2 \delta (\cos\delta - 1) \\
 \Lambda_{22} &= \frac{N}{128} s_1^2 (\cos\delta - 1)^2 (5 + 6\cos\delta + 5\cos^2 \delta) + \frac{N}{128} s_2^2 (\cos\delta - \\
 &\quad 1)^2 (7 + 2\cos\delta + 7\cos^2 \delta) + \frac{N}{64} s_3^2 \sin^2 \delta (5 + 2\cos\delta + \cos^2 \delta) \\
 \Lambda_{23} &= \Lambda_{32} = \frac{N}{32} s_1 s_2 (\cos\delta - 1)^3 \sin^2 \frac{\delta}{2} \\
 \Lambda_{24} &= \Lambda_{42} = -\frac{N}{16} s_1 s_2 \sin^4 \delta \\
 \Lambda_{33} &= \frac{3N}{32} s_1^2 (\cos\delta - 1)^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} + \frac{N}{32} s_2^2 (\cos\delta - 1)^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} + \\
 &\quad \frac{N}{16} s_3^2 \sin^2 \delta \sin^4 \frac{\delta}{2} \\
 \Lambda_{44} &= \frac{N}{16} s_1^2 (\cos\delta - 1)^2 \sin^2 \delta + \frac{N}{16} s_2^2 (\cos\delta - 1)^2 \sin^2 \delta + \frac{N}{32} s_3^2 \sin^4 \delta
 \end{aligned} \tag{13}$$

在推导式(12)和式(13)的过程中, 需要利用式(14)中的表达式, 这些表达式都可以利用 MATLAB 程序验证。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^2 4\theta_i = \sum_{i=1}^N \cos^2 \theta_i = \frac{N}{2} \\
 \sum_{i=1}^N \cos^3 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^3 2\theta_i \sin 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \cos 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \cos 2\theta_i \sin 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^4 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \cos^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \cos^5 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^5 2\theta_i \sin 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \cos^3 2\theta_i \sin^2 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^3 2\theta_i \sin^2 2\theta_i \sin 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos^3 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos^3 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \sin^3 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \sin^3 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^2 2\theta_i \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^2 2\theta_i \cos^2 4\theta_i =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \sin^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \cos^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin^3 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos^2 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin^2 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 4\theta_i = \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos^4 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \sin^2 2\theta_i \cos^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^3 2\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin^2 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \cos^2 2\theta_i \sin^2 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 4\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \cos^4 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \cos^2 2\theta_i \sin^3 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos^2 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^3 4\theta_i \sin^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \sin^2 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = 0 \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 4\theta_i \cos^2 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos 4\theta_i \cos 2\theta_i = 0 \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^2 4\theta_i \cos^2 2\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos^2 2\theta_i = \frac{N}{4} \\
 \sum_{i=1}^N \sin^4 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^4 2\theta_i = \frac{3N}{8} \\
 \sum_{i=1}^N \sin 2\theta_i \cos^3 2\theta_i \sin 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos^2 4\theta_i = \\
 \sum_{i=1}^N \sin^2 2\theta_i \cos^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^3 2\theta_i \sin 4\theta_i \cos 2\theta_i = \frac{N}{8} \\
 \sum_{i=1}^N \cos^4 2\theta_i \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \sin^2 4\theta_i = \frac{5N}{32} \\
 \sum_{i=1}^N \cos^4 2\theta_i \cos^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = \frac{7N}{32} \\
 \sum_{i=1}^N \cos^6 2\theta_i &= \frac{5N}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \cos^2 2\theta_i \sin^2 2\theta_i \sin^2 4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \cos^2 2\theta_i \sin^2 2\theta_i \cos^2 4\theta_i = \frac{N}{32} \\ \sum_{i=1}^N \cos^4 2\theta_i \sin^2 2\theta_i &= \sum_{i=1}^N \sin^4 2\theta_i \cos^2 2\theta_i = \\ \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \cos^2 2\theta_i \cos 4\theta_i &= \frac{N}{16} \\ \sum_{i=1}^N \sin^2 4\theta_i \sin^2 2\theta_i \cos 4\theta_i &= -\frac{N}{16} \end{aligned} \quad (14)$$

当波片方位角均匀分布于 360° ，即 $\theta_i = \theta_1 + (i-1) \frac{360^\circ}{N}$ ，($i = 1, 2, \dots, N$)，且 ($N = 9, 11, 13, 15, 17, 18, \dots$) 时，式 (14) 中的表达式都成立。但是当 $N = 5, 7, 10, 12, 14, 16$ 时，式 (14) 中有些表达式不成立。当 $N = 4, 6, 8$ 时，虽然式 (14) 中的大部分表达式也成立，但是此时测量矩阵 \mathbf{W} 是奇异矩阵，因此也不能被包括在内。

根据式 (10)–式 (13) 计算得到矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 如式 (15) 所示。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{4}{N}(1 + \cos^2 \delta)s_1^2 + \frac{8}{N}(1 + \cos \delta + \cos^2 \delta)s_2^2 - \\ &\quad \frac{2(5\cos^3 \delta + 7\cos^2 \delta + 3\cos \delta + 1)}{N(\cos \delta - 1)}s_3^2 \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{21} &= -\frac{4}{N}(1 + \cos \delta)s_1^2 - \frac{12}{N}(1 + \cos \delta)s_2^2 + \\ &\quad \frac{4(3\cos^3 \delta + 4\cos \delta + 1)}{N(\cos \delta - 1)}s_3^2 \\ \Gamma_{13} = \Gamma_{31} &= \frac{16}{N}\cos^2 \frac{\delta}{2}s_1s_2 \\ \Gamma_{14} = \Gamma_{41} &= -\frac{8}{N}\sin^2 \frac{\delta}{2}s_1s_3 \\ \Gamma_{22} &= \frac{8}{N}s_1^2 + \frac{24}{N}s_2^2 + \frac{16}{N}\cot^2 \frac{\delta}{2}s_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23} = \Gamma_{32} &= -\frac{16}{N}s_1s_2 \\ \Gamma_{24} = \Gamma_{42} = \Gamma_{34} = \Gamma_{43} &= 0 \\ \Gamma_{33} &= \frac{24}{N}s_1^2 + \frac{8}{N}s_2^2 + \frac{16}{N}\cot^2 \frac{\delta}{2}s_3^2 \\ \Gamma_{44} &= \frac{4}{N}\tan^2 \frac{\delta}{2}s_1^2 + \frac{4}{N}\tan^2 \frac{\delta}{2}s_2^2 + \frac{2}{N}s_3^2 \end{aligned} \quad (15)$$

协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_e$ 的对角线元素表示对应 Stokes 参数的测量误差。矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的非对角线元素表示 Stokes 误差矢量各分量之间的相关性，对角线元素表示波片快轴方位误差向 Stokes 矢量测量误差传递的增益。矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的迹可以作为整体评价偏振测量系统对波片快轴方位误差灵敏度的参数，矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的迹越大，Stokes 矢量测量误差越大。矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的迹 $\text{Tr}(\mathbf{\Gamma})$ 如式 (16) 所示。

$$\text{Tr}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{4}{N}(C_1s_1^2 + C_2s_2^2 + C_3s_3^2) \quad (16)$$

式 (16) 中的三个系数 C_1, C_2, C_3 如式 (17) 所示。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\cos^4 \delta + 7\cos^2 \delta + 2\cos \delta - 10}{\cos^2 \delta - 1} \\ C_2 &= \frac{2\cos^4 \delta + 2\cos^3 \delta + 7\cos^2 \delta - 11}{\cos^2 \delta - 1} \\ C_3 &= -\frac{5\cos^4 \delta + 12\cos^3 \delta + 25\cos^2 \delta + 36\cos \delta + 18}{2(\cos^2 \delta - 1)} \end{aligned} \quad (17)$$

根据协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_e$ 和式 (16) 可知，RRFP Stokes 偏振仪中由波片方位误差引入的测量误差独立于入射光强 s_0 ，但是依赖于入射光的偏振态 (s_1, s_2, s_3) 和波片的位相延迟量 δ ，并且与光强测量次数 N 成反比。当入射光的偏振态均匀分布于邦加球上时，式 (16) 中 $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1/3$ ，此时矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的迹 $\text{Tr}(\mathbf{\Gamma})$ 将变为式 (18)。

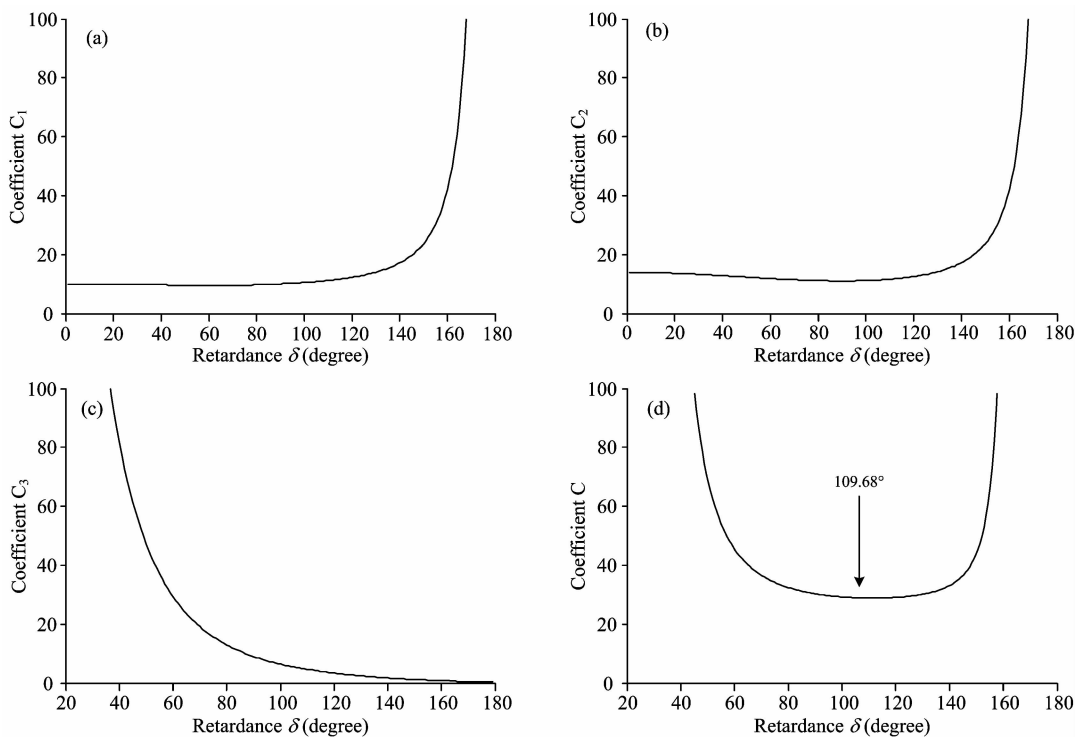


图 2 系数 C_1, C_2, C_3 和 C 与波片位相延迟量 δ 的关系
 Fig. 2 The relationship between C_1, C_2, C_3, C and the retardance δ

$$\text{Tr}(\mathbf{F}) = \frac{4}{3N}(C_1 + C_2 + C_3) \quad (18)$$

所以, 当入射光偏振态均匀分布于邦加球上时, SV 的测量误差仅依赖光强测量次数 N 和波片的位相延迟量 δ 。系数 C_1, C_2, C_3 和它们的和 $C=C_1+C_2+C_3$ 与波片位相延迟量 δ 的关系见图 2。根据图 2(d) 可见, 当 $\delta=109.68^\circ$ 时, $\text{Tr}(\mathbf{F})$ 的值最小, 且在 $103.22^\circ \leq \delta \leq 116.13^\circ$ 范围内 $\text{Tr}(\mathbf{F})$ 仅增加了最小值的 1%。

系数 C_1, C_2 是 Stokes 参数反演误差对入射光线偏振分量 (s_1, s_2) 的依赖系数, 系数 C_3 是 Stokes 参数反演误差对入射光圆偏振分量 (s_3) 的依赖系数。此依赖系数越大, 相应偏振分量对测量误差的贡献越大。根据图 2 可知, 为了减小 Stokes 矢量的反演误差, 当入射偏振态主要分布在邦加球的赤道附近时, 波片位相延迟量应该小于 130° ; 当入射偏振态主要分布在邦加球的两极时, 波片位相延迟量应该大于 85° 。

当入射光的偏振态不是均匀分布于邦加球上时, 如果根据理论分析或者原始数据能够预测入射光的偏振态分布, 可以利用系数 C_1, C_2, C_3 的加权之和表征偏振仪对波片方位

误差的灵敏度, 类似式(19)所示。系数 a_1, a_2, a_3 表示入射光偏振态中 s_1, s_2, s_3 参数的重要程度。

$$\text{Tr}(\mathbf{F}) = \frac{4}{N}(a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3) \quad (19)$$

2 仿真验证

我们设计了仿真实验验证本文第 1 部分的理论结果。实验步骤如下:

(1) 利用 MATLAB 产生 10^6 个波片方位误差, 标准差 $\sigma=0.05$ 弧度;

(2) 利用公式 $\Delta \vec{S} = \mathbf{W}^+ (\mathbf{W}' - \mathbf{W}) \vec{S}$ 计算每个波片方位误差引起的 SV 测量误差;

(3) 分别计算四个 Stokes 参数测量误差的方差;

(4) 利用式(9)和式(15)计算标准差 $\sigma=0.05$ rad 的波片方位误差引起的 SV 测量误差, 并与步骤(3)的计算结果相比较。

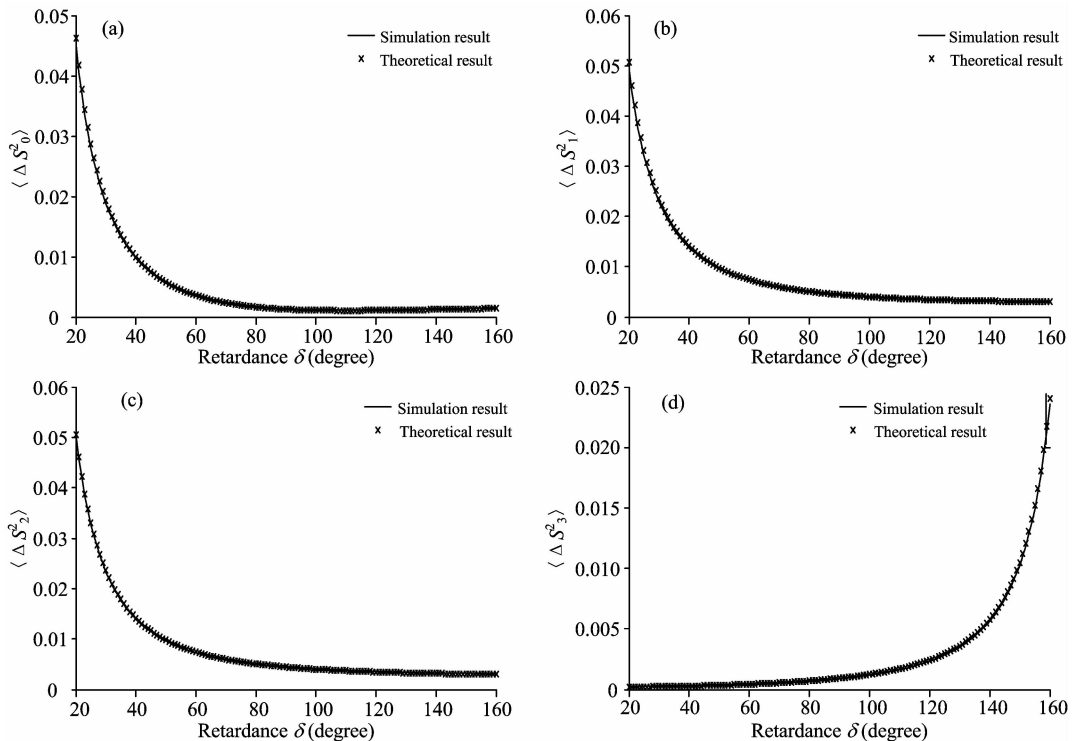


图 3 当 $N=9$ 时, $\langle \Delta S_i^2 \rangle, i=0, 1, 2, 3$ 的理论和仿真结果

Fig. 3 Simulation and theoretical results of $\langle \Delta S_i^2 \rangle, i=0, 1, 2, 3$ for $N=9$

我们验证了 112 个均匀分布于邦加球上的入射光偏振态在波片位相延迟量 $20^\circ \leq \delta \leq 160^\circ$ 范围内的情况, 实验结果表明, 根据式(9)和式(15)计算的理论与仿真实验的结果完全吻合。限于篇幅, 本文仅展示当 $N=9$, 入射偏振态为 $(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ 时的情况。仿真实验结果与理论计算结果同时被展示在图 3 中以便于比较。从图 3 中可以看出, 四个 Stokes 参数的测量误差的理论结果和仿真结果非常吻合,

证明了第 1 部分中的解析结果的正确性。

3 结论

研究了 RRFPS Stokes 偏振仪的波片方位误差引入的 SV 测量误差。首先利用泰勒展开的第一项近似将由波片方位误差引入的光强测量误差分离。其次, 根据波片方位误差的特性, 假设波片方位误差为随机误差, 且服从同一高斯分布,

基于此假设, 推导出 Stokes 参数测量误差的协方差矩阵。根据推导所得的协方差矩阵, 得到以下结论: (1) 由波片方位误差引入的 SV 测量误差独立于入射光强 s_0 ; (2) 测量误差依赖于入射光的偏振态 (s_1, s_2, s_3) 和波片的位相延迟量; (3)

测量误差与光强测量次数 N 成反比; (4) 当入射光偏振态均匀分布于邦加球上, 波片位相延迟量 $103.22^\circ \leq \delta \leq 116.13^\circ$ 能够使波片方位误差引入的 SV 测量误差最小。最后, 利用仿真实验验证了理论推导结果的正确性。

References

- [1] BO Guang-yu, LIU Dong, WANG Bang-xin(伯广宇, 刘 东, 王邦新). Chinese Journal of Lasers(中国激光), 2012, 39(10): 1014002-1.
- [2] FENG Ming-chun, GAO Min-guang, XU Liang(冯明春, 高闽光, 徐 亮). Acta Optics Sinica(光学学报), 2012, 32(4): 0401002-1.
- [3] CHU Jin-kui, WANG Wei, CUI Yan(褚金奎, 王 威, 崔 岩). Optics and Precision Engineering(光学 精密工程), 2012, 20(3): 520.
- [4] Walraven R. Opt. Eng., 1981, 20: 14.
- [5] ZHAO Yun-sheng, SUN Zhong-qiu, LI Shao-ping(赵云升, 孙仲秋, 李少平). Journal of Atmospheric and Environmental Optics(大气与环境光学学报), 2010, 5(3): 190.
- [6] Wolff L B, Bault T E. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1991, 13: 635.
- [7] Ambirajan A, Look D C. Opt. Eng., 1995, 34: 1651.
- [8] Sabatke D S. Opt. Lett., 2000, 25(11): 802.
- [9] Francois Goudail. Opt. Lett., 2009, 34(5): 647.
- [10] Tyo J S, Hua Wei. Appl. Opt., 2006, 45(22): 5497.
- [11] Tyo J S. Appl. Opt., 2002, 41(4): 619.
- [12] Sabatke D S, Locke A M, Descour M R. Figure of Merit for Complete Stokes Polarimeter Optimization. Polarization Analysis, Measurement, and Remote Sensing III, Chenault D B, eds., Proceedings of SPIE, 2000, 4133: 75.
- [13] Dong H, Shum P, Gong Y, et al. Opt. Eng., 2001, 51(3): 033001-1.

Investigation of Azimuth Error of the Retarder of Stokes Polarimeter

DAI Hu^{1, 2}, YAN Chang-xiang^{1*}

1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China

2. Lanzhou Institute of Physics, CAST, Lanzhou 730000, China

Abstract Rotatable retarder fixed polarizer (RRFP) Stokes polarimeters are widely used to detect the state of polarization of light. The orientation error of the retarder is one of important error sources of RRFP Stokes polarimeters. In order to investigate the effect of the orientation errors of retarder on measurement results, a new analytical model is proposed to express the polarimetric error resulted from it, and a methods based on covariance matrix is used to express the polarimetric error. In addition, according to the analytical error model, the optimal polarimeter configuration is obtained. During derivation, we suppose that the angular orientation errors of the retarder obey a uniform Gauss distribution. Based on the analytical model derived, it can be concluded that (1) the measurement errors induced by the angular orientation error of the retarder is inversely proportional to N ; (2) the measurement errors are independent to the incident intensity s_0 , but seriously depend on the incident state of polarization (s_1, s_2, s_3) and the retardance of the retarder δ ; (3) the retardance ranging from 103.22° to 116.13° , which results in the minimum measurement errors induced by the orientation errors of the retarder. Finally, simulation is performed to prove that these analytical results derived agree well with simulation results.

Keywords Polarization; Ellipsometry and polarimetry; Covariance matrix; Retarder azimuth error

(Received Feb. 21, 2014; accepted Apr. 18, 2015)

* Corresponding author